Тема 4 Интегральное исчисление функции одной действительной переменной

Функция F (x) называется первообразной для функции f (x), если $F'(x) = f(x)$ или dF (x) = f (x) dx. Если функция f (x) имеет первообразную F(x), то она имеет бесконечное множество первообразных, причем все первообразные содержатся в выражении

F (x) + C, где C – постоянная.

Неопределенным интегралом от функции f (x) (или от выражения f (x) dx) называется совокупность всех ее первообразных. Обозначение: $\int f(x)\,dx = F(x)+C$. Здесь $\int$ – знак интеграла, f (x) – подынтегральная функция, f (x) dx – подынтегральное выражение, x – переменная интегрирования.

Отыскание неопределенного интеграла называется интегрированием функции.

Свойства неопределенного интеграла:

1°. $\left(\int f(x)\,dx\right)' = f(x)$.

2°. $d\left(\int f(x)\,dx\right) = f(x)\,dx$.

3°. $\int dF(x) = F(x) + C$.

4°. $\int af(x)\,dx = a\int f(x)\,dx$, где a – постоянная.

5°. $\int [f_1(x) \pm f_2(x)]\,dx = \int f_1(x)\,dx \pm \int f_2(x)\,dx$.

6°. Если $\int f(x)\,dx = F(x) + C$ и $u = \varphi(x)$, то $\int f(u)\,du = F(u) + C$

Таблица основных неопределенных интегралов:

1. $\int dx = x + C$.
2. $\int x^\alpha dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$.
3. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$.
4. $\int a^u dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$.
5. $\int e^u dx = e^x + C$.
6. $\int \cos x dx = \sin x + C$.
7. $\int \sin x dx = -\cos x + C$.
8. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$.
9. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$.
10. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\dfrac{x}{a} + C$.
11. $\int \dfrac{dx}{a^2 + x^2} = \dfrac{1}{a} arctg\,\dfrac{x}{a} + C$.
12. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 + \lambda}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 + \lambda}\right| + C$.
13. $\int \dfrac{dx}{x^2 - a^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{x-a}{x+a}\right| + C$.

Пример 1. Найти интеграл $\int (x^3 - 5x^2 + 7x - 3)\,dx$.

Решение. Используя свойства 4° и 5°, получаем

$$\int \left(x^3 - 5x^2 + 7x - 3\right)dx = \int x^3dx - 5\int x^2dx + 7\int xdx - 3\int dx.$$

К первым трем интегралам правой части применим формулу (2), а к четвертому интегралу – формулу (1) таблицы интегралов:

$$\int \left(x^3 - 5x^2 + 7x - 3\right)dx = \frac{x^4}{4} - 5\cdot\frac{x^3}{3} + 7\cdot\frac{x^2}{2} - 3x + C = \frac{1}{2}x^4 - \frac{5}{3}x^3 + \frac{7}{2}x^2 - 3x + C.$$

Пример 2. Найти интеграл $\int \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^2 dx$.

Решение:

$$\int \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^2 dx = \int \left(x + 2\cdot\frac{x^{1/2}}{x^{1/3}} + \frac{1}{x^{2/3}}\right) dx = \int \left(x + 2x^{1/6} + x^{-2/3}\right) dx =$$

$$= \int xdx + 2\int x^{1/6}dx + \int x^{-2/3}dx = \frac{x^2}{2} + 2\cdot\frac{x^{1/3}}{1/3} + C = \frac{x^2}{2} + \frac{12}{7}x\sqrt[6]{x} + 3\sqrt[3]{x} + C.$$

Замена переменной в неопределенном интеграле

Пусть x = φ (t), где φ (t) – монотонная, непрерывно дифференцируемая функция новой переменной t. Тогда формула замены переменной в этом случае имеет вид

$$\int f(x)dx = \int f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)dt.$$

Пример 3. Найти интеграл $\int \sin(1-5x)dx$.

Решение:

$$\int \sin\left(1-5x\right)dx = \left| \begin{matrix} 1-5x=t \\ x=\frac{1-t}{5} \\ dx=-\frac{1}{5}dt \end{matrix} \right| = \int \sin t\left(-\frac{dt}{5}\right) = -\frac{1}{5}\int \sin tdt = \frac{1}{5}\cos t + C =$$

$$= \frac{1}{5}cos(1-5x) + C.$$

Пример 4. Найти интеграл $\int \frac{\sin\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}}dx.$

Решение:

$$\int \frac{\sin\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}}dx = \left| \begin{matrix} t=\sqrt[3]{x},\ x=t^3 \\ dx=3t^2dt \end{matrix} \right| = \int \frac{3t^2\sin t}{t^2}dt = 3\int \sin tdt = -3\cos t + C.$$

Ответ должен быть выражен через старую переменную x. Подставляя в результат интегрирования $t = \sqrt[3]{x}$, получим $\int \frac{\sin\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}}dx = -3\cos\sqrt[3]{x} + C.$

Пример 5. Найти интеграл $\int \frac{(2\ln x+3)^3}{x}dx.$

Решение:

$$\int (2\ln x+3)^3 \frac{dx}{x} = \left| \begin{matrix} t = 2\ln x + 3 \\ dt = 2\dfrac{dx}{x} \end{matrix} \right| = \int t^3 \frac{1}{2}dt = \frac{1}{2}\int t^3 dt = \frac{1}{8}t^4 + C = \frac{1}{8}(2\ln x+3)^4 + $$

$$+ C.$$

Пример 6. Найти интеграл $\int \frac{\sin 2x dx}{\sqrt{3-\cos^4 x}}.$

Решение:

$$\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{3-\cos^4 x}}dx = \left| \begin{matrix} \cos^2 x = t \\ -2\cos x \cdot \sin x dx = dt \end{matrix} \right| = -\int \frac{dt}{\sqrt{3-t^2}} = -\arcsin\frac{t}{\sqrt{3}} + C =$$

$$= -\arcsin\frac{\cos^2 x}{\sqrt{3}} + C.$$

Пример 7. Найти интеграл $\int \frac{e^{2x}}{e^{4x}-16}dx.$

Решение:

$$\int \frac{e^{2x}dx}{e^{4x}-16} = \left| \begin{matrix} e^{2x} = t \\ 2e^{2x}dx = dt \end{matrix} \right| = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2-16} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2\cdot 4}\ln\left|\frac{t-4}{t+4}\right| + C$$

. Возвращаясь к старой переменной, получим

$$\int \frac{e^{2x}dx}{e^{4x}-16} = \frac{1}{16}\ln\left|\frac{e^{2x}-4}{e^{2x}+4}\right| + C.$$

Интегрирование по частям

Интегрированием по частям называется нахождение интеграла по формуле

$$\int u\ dv = u\ v - \int v\ du,$$

где u = φ(x), v = ψ (x) – непрерывно дифференцируемые функции от $\boldsymbol{x}$.

При этом за **u** берется такая функция, которая при дифференцировании упрощается, а за **dv** – та часть подынтегрального выражения, интеграл от которой известен или может быть найден.

Так, например, для интегралов вида

$$\int P(x)e^{ax}dx, \quad \int P(x)\sin axdx, \quad \int P(x)\cos axdx,$$

где $P(x)$ – многочлен, за **u** следует принять $P(x)$, а за **dv** – соответственно выражение $e^{ax}dx, \sin axdx, \cos axdx;$ для интегралов вида

$$\int P(x)\ln xdx, \quad \int P(x)\arcsin xdx, \quad \int P(x)\arccos xdx$$

за **u** принимаются соответственно функции $\ln x, \arcsin x, \arccos x,$ а за **dv** – выражение $P(x)dx.$

Пример 8. Найти интеграл $\int arctgxdx$.

Решение:

$$\int arctgxdx = \begin{vmatrix} u = arctgx, dv = dx \\ du = \dfrac{dx}{1+x^2}, v = x \end{vmatrix}.$$ По формуле интегрирования по частям находим

$$\int arctgxdx = xarctgx - \int \frac{xdx}{1+x^2} = xarctgx - \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right) + C.$$

Пример 9. Найти интеграл $\int x\sin xdx$.

Решение:

$$\int x\sin xdx = \begin{vmatrix} u = x, dv = \sin xdx \\ du = dx, v = -\cos x \end{vmatrix}.$$ Отсюда по формуле интегрирования по частям находим: $\int x\sin xdx = -x\cos x + \int \cos xdx = -x\cos x + \sin x + C.$

Интегрирование рациональных функций

Дробной – рациональной функцией называется функция, равная частному от деления двух многочленов:

$$R(x) = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)}.$$

Рациональная дробь называется правильной, если степень числителя меньше степени знаменателя, в противном случае – неправильной. Отметим, что всякую неправильную рациональную дробь можно представить в виде суммы многочлена и правильной рациональной дроби:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = L(x) + \frac{r(x)}{Q(x)},$$

где r(x) – многочлен, степени меньше степени знаменателя Q(x). Таким образом, интегрирование рациональной функции сводится к интегрированию правильной рациональной дроби. А интегрирование правильной рациональной дроби сводится к интегрированию простейших дробей типа:

1. $\dfrac{A}{x-a}$; **2.** $\dfrac{A}{(x-a)^n}$;

3. $\dfrac{Ax+B}{x^2+px+q}$; **4.** $\dfrac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}$.

(x^2+px+q – не имеет действительных корней.)

Интегрирование простейших рациональных дробей:

1. $$\int \frac{Adx}{x-a} = A\int \frac{d(x-a)}{x-a} = A\ln|x-a| + C.$$

2. $$\int \frac{Adx}{(x-a)^n} = A\int (x-a)^{-n} d(x-a) = \frac{A}{(1-n)(x-a)^{n-1}} + C.$$

3. Основной способ нахождения интеграла $\displaystyle\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx$ состоит в предварительном выделении полного квадратного трехчлена:

$$x^2+px+q=\left[\left(x^2+2\cdot\frac{p}{2}x+\frac{p^2}{4}\right)-\frac{p^2}{4}\right]+C=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2-\frac{p^2}{4}+C.$$

Рассмотрим этот способ на примере.

Пример 10. Вычислить интеграл $\int\frac{xdx}{x^2+2x-1}.$

Решение. Выделим полный квадрат в знаменателе и преобразуем дробь:

$$x^2+2x-1=x^2+2x+1-1-1=(x+1)^2-2.$$

Тогда $\int\frac{xdx}{x^2+2x-1}=\frac{1}{2}\int\frac{2(x+1-1)dx}{x^2+2x-1}=\frac{1}{2}\int\frac{d((x+1)^2-2)}{(x+1)^2-2}-\int\frac{dx}{(x+1)^2-2}=$

$=\frac{1}{2}\ln\left|(x+1)^2-2\right|-\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x+1-\sqrt{2}}{x+1+\sqrt{2}}\right|+C.$

4. Если введем новую переменную t, положив $t=x+\frac{p}{2}$ и

$x^2+px+q=t^2+a^2$, где $a^2=q-\frac{p^2}{4}$, то интеграл $\int\frac{Ax+B}{\left(x^2+px+q\right)^n}dx=I_n$ можно вычислить с помощью реккурентной формулы

$$I_n=\frac{1}{a^2}\left(\frac{3-2n}{2-2n}I_{n-1}+\frac{t}{2(n-1)\left(t^2+a^2\right)^{n-1}}\right).$$

Интегрирование рациональных дробей с помощью разложения на простейшие дроби

Случай 1. Знаменатель имеет только действительные различные корни, т.е.

разлагается на неповторяющиеся множители первой степени.

Пример 11. Найти интеграл $\int\frac{x^2+2x+3}{(x-1)(x-2)(x-4)}dx.$

Решение. Так как каждый из двухчленов $x-1, x-2, x-4$ входит в знаменатель в первой степени, то данная правильная рациональная дробь может быть представлена в виде

$$\frac{x^2+2x+3}{(x-1)(x-2)(x-4)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x-4}.$$

Освобождаясь от знаменателей, получим

$$x^2+2x+3=A(x-2)(x-4)+B(x-1)(x-4)+C(x-1)(x-2).$$

При x = 1 $\quad 6=3A,\quad A=2;$

при x = 2 $\quad 11=-2B,\quad B=-{}^{11}\!/_{2};$

при x = 4 27 = 6C, C = $^9\!/\!_2$.

Итак, разложение рациональной дроби на простейшие имеет вид

$$\frac{x^2+2x+6}{(x-1)(x-2)(x-4)}=\frac{3}{x-1}-\frac{11/2}{x-2}+\frac{9/2}{x-4}.$$

Таким образом,

$$\int\frac{x^2+2x+3}{(x-1)(x-2)(x-4)}dx=3\int\frac{dx}{x-1}-\frac{11}{2}\int\frac{dx}{x-2}+\frac{9}{2}\int\frac{dx}{x-4}=3\ln|x-1|-$$
$$-\frac{11}{2}\ln|x-2|+\frac{9}{2}\ln|x-4|+C.$$

Случай 2. Знаменатель имеет лишь действительные корни, причем некоторые из них кратные, т.е. знаменатель разлагается на множители первой степени и некоторые из них повторяются.

Пример 12. Найти интеграл $\int\frac{x^2+1}{(x-1)^3(x+3)}dx.$

Решение. Множителю $(x-1)^3$ соответствует сумма трех простейших дробей $\frac{A}{(x-1)^3}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{x-1}$, а множителю $x+3$ – простейшая дробь $\frac{D}{x+3}$. Итак,

$$\frac{x^2+1}{(x-1)^3(x+3)}=\frac{A}{(x-1)^3}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{x-1}+\frac{D}{x+3}.$$

Освободимся от знаменателя:

$$x^2+1=A(x+3)+B(x-1)(x+3)+C(x-1)^2(x+3)+D(x-1)^3.$$

x = 1	2 = 4A; A = $\frac{1}{2}$
x = –3	10 = –64D; D = –$\frac{5}{32}$
x = 0	1= $\frac{3}{2}$ –3B + 3C + $\frac{5}{2}$
x = –1	2 = 1– 4B + 8C + $\frac{5}{4}$

Откуда B = $\frac{3}{8}$, C = $\frac{5}{32}$.

Окончательное разложение данной дроби на простейшие имеет вид

$$\frac{x^2+1}{(x-1)^3(x+3)}=\frac{1}{2(x-1)^3}+\frac{3}{8(x-1)^2}+\frac{5}{32(x-1)}-\frac{5}{32(x+3)}.$$

Таким образом, получим

$$\int \frac{x^2+1}{(x-1)^3(x-3)}dx = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{(x-1)^3} + \frac{3}{8}\int \frac{dx}{(x-1)^2} + \frac{5}{32}\int \frac{dx}{x-1} - \frac{5}{32}\int \frac{dx}{x+3} =$$

$$= -\frac{1}{4(x-1)^2} - \frac{3}{8(x-1)} + \frac{5}{32}\ln|x-1| - \frac{5}{32}\ln|x+3| + C.$$

Случай 3. Среди корней знаменателя имеются простые комплексные корни, т.е. разложение знаменателя содержит квадратичные неповторяющиеся множители.

Пример 13. Найти интеграл $\int \frac{dx}{x(x^2+x+1)}$.

Решение. Разлагаем дробь на простейшие дроби

$$\frac{1}{x\left(x^2+x+1\right)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1}.$$

Освобождаемся от знаменателя:

$1 = A\left(x^2+x+1\right) + (Bx+C)x$. Выпишем коэффициенты при одинаковых степенях:

при x^2: $0 = A+B$

x: $0 = A+C$

x^0: $1 = A$

Откуда найдем A = 1, B = –1, C = –1.

Итак, $\frac{1}{x\left(x^2+x+1\right)} = \frac{1}{x} - \frac{x+1}{x^2+x+1}$.

Следовательно,

$$\int \frac{dx}{x(x^2+x+1)} = \int \frac{dx}{x} - \int \frac{(x+1)dx}{x^2+x+1} = \ln|x| - \int \frac{(x+1)dx}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} = \ln|x| -$$

$$-\frac{1}{2}\int \frac{d((x+1/2)^2+3/4)}{(x+1/2)^2+3/4} - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{(x+1/2)^2+3/4} = \ln|x| - \frac{1}{2}\ln\left|(x+1/2)^2+3/4\right| -$$

$$-\frac{1}{\sqrt{3}}arctg\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C.$$

Случай 4. Среди корней знаменателя имеются кратные комплексные корни, т.е. разложение знаменателя содержит повторяющиеся квадратичные множители.

Пример 14. Найти интеграл $\int \frac{x^3-x}{\left(x^2+1\right)^2}dx.$

Решение. Так как x^2+1 есть двукратный множитель, то

$$\frac{x^3-x}{\left(x^2+1\right)^2} = \frac{Ax+B}{\left(x^2+1\right)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1}.$$

Освобождаясь от знаменателей, получим

$$x^3 - x = Ax + B + (Cx + D)(x^2 + 1).$$

Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях x:

$$\begin{array}{c|l} x^3 & 1 = C, \\ x^2 & 0 = D, \\ x^1 & -1 = A + C; A = -2, \\ x^0 & 0 = B + D; B = 0. \end{array}$$

Следовательно,

$$\int \frac{x^3 - x}{(x^2+1)^2} dx = -\int \frac{2xdx}{(x^2+1)^2} + \int \frac{xdx}{x^2+1} = -\int \frac{d(x^2+1)}{(x^2+1)^2} + \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+1)}{x^2+1} =$$

$$= \frac{1}{(x^2+1)} + \frac{1}{2}\ln\left|x^2+1\right| + C.$$

Интегрирование иррациональных функций

Неопределенный интеграл вида $\int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx$ интегрируется путем введения новой переменной $t = \frac{1}{2}\left(ax^2+bx+c\right)'$.

Интегралы вида $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ интегрируются путем выделения полного квадрата из квадратного трехчлена.

Пример 15. Вычислить интеграл $\int \frac{9-4x}{\sqrt{5+8x-4x^2}} dx$.

Решение:

$$\int \frac{9-4x}{\sqrt{5+8x-4x^2}} dx = \left| \begin{array}{l} t = \frac{1}{2}\left(5+8x-4x^2\right)' = \frac{1}{2}(8-8x) = 4-4x \\ x = \frac{1}{4}(4-t), dx = -\frac{1}{4}dt. \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{\left(9-4\frac{1}{4}(4-t)\right)\left(-\frac{1}{4}dt\right)}{\sqrt{5+8\frac{1}{4}(4-t)-4\frac{1}{16}(4-t)^2}} = -\frac{1}{4}\int \frac{9-4+t}{\sqrt{5+8-2t-4+2t-\frac{1}{4}t^2}} dt =$$

$$= -\frac{1}{4}\int \frac{5+t}{\sqrt{9-\frac{1}{4}t^2}} dt = -\frac{1}{2}\int \frac{5+t}{\sqrt{36-t^2}} dt = -\frac{5}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{36-t^2}} - \frac{1}{2}\int \frac{tdt}{\sqrt{36-t^2}} =$$

$= -\frac{5}{2}\arcsin\frac{t}{6} + \frac{1}{4}\int\frac{d(36-t^2)}{\sqrt{36-t^2}} = -\frac{5}{2}\arcsin\frac{t}{6} + \frac{1}{2}\sqrt{36-t^2} + C$, где $t = 4-4x$.

Пример 16. Вычислить интеграл $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+2x-1}}$.

Решение:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+2x-1}} = \int\frac{dx}{\sqrt{(x+1)^2-2}} = \ln\left|x+1+\sqrt{(x+1)^2-2}\right| + C.$$

Интеграл вида $\int R(x, \sqrt[n]{ax+b})dx$, где n $\in$ Z, интегрируются путем введения новой переменной $t^n = ax + b$.

Пример 17. Вычислить интеграл $\int\frac{1-\sqrt{x}}{x-2\sqrt{x}}dx$.

Решение:

$$\int\frac{1-\sqrt{x}}{x-2\sqrt{x}}dx = \begin{vmatrix} x = t^2 \\ dx = 2tdt \end{vmatrix} = \int\frac{1-t}{t^2-2t}\cdot 2tdt = 2\int\frac{1-t}{t-2}dt = -2\left(\int dt + \int\frac{dt}{t-2}\right) =$$

$= -2t-2\ln|t-2| + C = -2\sqrt{x} - 2\ln\left|\sqrt{x}-2\right| + C.$

Интегралы вида $\int\frac{P_n(x)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$, где $P_n(x)$ – многочлен степени n, вычисляются с помощью реккурентной формулы

$$\int\frac{P_n(x)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = Q_n(x)\sqrt{ax^2+bx+c} + \lambda\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}, \qquad (21)$$

где $Q_{n-1}(x)$ – многочлен степени (n – 1) с неопределенными коэффициентами и λ – число. Коэффициенты многочлена и число λ находятся при помощи дифференцирования тождества (21).

Пример 18. Вычислить интеграл $\int\frac{x^2dx}{\sqrt{x^2+4}}$.

Решение. Применяем формулу (21):

$\int\frac{x^2dx}{\sqrt{x^2+4}} = (Ax+B)\sqrt{x^2+4} + \lambda\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+4}}$. Дифференцируем это тождество: $\frac{x^2}{\sqrt{x^2+4}} = A\sqrt{x^2+4} + \frac{(Ax+B)\cdot 2x}{2\sqrt{x^2+4}} + \frac{\lambda}{\sqrt{x^2+4}}$. Откуда

$$x^2 = A(x^2+4) + x(Ax+B) + \lambda.$$

Выпишем коэффициенты при одинаковых степенях:

x^2: $1 = A + A$

x: $0 = Bx$

x^0: $0 = 4A + \lambda$.

Итак, А = $\frac{1}{2}$, В = 0, λ = –2. Следовательно,

$$\int \frac{x^2dx}{\sqrt{x^2+4}} = \frac{1}{2}\sqrt{x^2+4} - 2\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4}} = \frac{1}{2}\sqrt{x^2+4} - 2\ln\left|x+\sqrt{x^2+4}\right| + C.$$

Интеграл от дифференциального бинома $\int x^m (a+bx^n)^p\,dx$, где m, n, p – рациональные числа:

1) если p – целое число, то делаем замену $x = t^s$, где s – общий знаменатель дробей m и n;

2) если $\frac{m+1}{n}$ – целое число, то делаем замену $a+bx^n = t^s$, где s – знаменатель дроби p;

3) если $\frac{m+1}{n}$ +p – целое число, то делаем замену $ax^{-n}+b = t^s$, где s – знаменатель дроби p.

Пример 19. Вычислить интеграл $\int \frac{\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx.$

Решение:

$$\int \frac{\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx = \int x^{-2/3}(1+x^{1/3})^{1/2}dx = \left| \begin{array}{l} m=-2/3,\ n=1/3,\ p=1/2 \\ \text{так как } \dfrac{m+1}{n}=1, \text{ то} \\ 1+x^{1/3}=t^2,\ x^{-2/3}dx = 6t\,dt \end{array} \right| =$$

$$= \int t\cdot 6tdt = 6\int t^2dt = 2t^3 + C = 2(1+\sqrt[3]{x})^{3/2} + C.$$

Интегрирование тригонометрических функций

1. Интегралы вида $\int R(\sin x, \cos x)dx,$ где R – рациональная функция, приводятся к интегралам от рациональных функций с помощью так называемой универсальной тригонометрической подстановки $tg(x/2) = t.$ В результате этой подстановки имеем:

$$\sin x = \frac{2tg(x/2)}{1+tg^2(x/2)} = \frac{2t}{1+t^2};$$

$$\cos x = \frac{1-tg^2(x/2)}{1+tg^2(x/2)} = \frac{1-t^2}{1+t^2};$$

$$x = 2arctgt;\ dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

Пример 20. Найти интеграл $\int \frac{dx}{\sin x + 3\cos x + 5}.$

Решение. Введем новую переменную $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$. Тогда

$$\int\frac{dx}{\sin x+3\cos x+5}=\left|\begin{aligned}\sin x&=\frac{2t}{1+t^2}\\ \cos x&=\frac{1-t^2}{1+t^2}\\ dx&=\frac{2dt}{1+t^2}\end{aligned}\right|=\int\frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}+3\frac{1-t^2}{1+t^2}+5}=$$

$$=\int\frac{2dt}{2t+3-3t^2+5+5t^2}=\int\frac{dt}{t^2+t+4}=\int\frac{dt}{(t+\frac{1}{2})^2+\frac{15}{4}}=\frac{2}{\sqrt{15}}\operatorname{arctg}\frac{2t+1}{\sqrt{15}}+$$

$$+C=\frac{2}{\sqrt{15}}arctg\,\frac{2tg\frac{x}{2}+1}{\sqrt{15}}+C.$$

Универсальная подстановка $tg(x/2)=t$ во многих случаях приводит к сложным вычислениям, так как при ее применении $\sin x$ и $\cos x$ выражаются через t в виде рациональных дробей, содержащих t^2.

В некоторых частных случаях нахождение интеграла вида $\int R(\sin x,\cos x)\ dx$ может быть упрощено:

1. Если $R(\sin x,\cos x)$ – нечетная функция относительно $\sin x$, т.е., если $R(-\sin x,\cos x)=-R(\sin x,\cos x)$, то интеграл рационализируется подстановкой $\cos x=t.$

2. Если $R(\sin x,\cos x)$ – нечетная функция относительно $\cos x$, т.е., если $R(\sin x,-\cos x)=-R(\sin x,\cos x)$, то интеграл рационализируется с помощью подстановки $\sin x=t.$

3. Если $R(\sin x,\cos x)$ – четная функция и относительно $\sin x$ и относительно $\cos x$, т.е., если $R(-\sin x,-\cos x)=R(\sin x,\cos x)$, то к цели приводит подстановка $tgx=t.$

Пример 21. Найти интеграл $\int\frac{(\sin x+\sin^3 x)dx}{\cos 2x}.$

Решение. Так как подынтегральная функция нечетна относительно синуса, то полагаем $\cos x=t$:

$$\int\frac{(\sin x+\sin^3 x)dx}{\cos 2x}=\left|\begin{matrix}\cos x=t, & \sin^2 x=1-t^2\\ \cos 2x=2t^2-1, & dt=-\sin x dx\end{matrix}\right|=\int\frac{(2-t^2)(-dt)}{2t^2-1}=$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{2t^2-4}{2t^2-2}dt=\frac{1}{2}\int dt-\frac{3}{2}\int\frac{dt}{2t^2-1}=\frac{t}{2}-\frac{3}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{t\sqrt{2}-1}{t\sqrt{2}+1}\right|+C=\frac{1}{2}cosx-$$

$$-\frac{3}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}\cos x-1}{\sqrt{2}\cos x+1}\right|+C.$$

2. ***Интегралы вида*** $\int \sin^m x \cos^n x dx.$

Выделим здесь два случая, имеющие особенно важное значение.

Случай 1. По крайней мере один из показателей m или n – нечетное положительное число.

Если n – нечетное положительное число, то применяется подстановка $\sin x = t.$ Если же m – нечетное положительное число, подстановка $\cos x = t.$

Пример 22. Найти интеграл $\int \sin^4 x \cos^5 x dx.$

Решение. Полагая $\cos x = t, \cos x dx = dt,$ получим

$$\int \sin^4 x \cos^5 x dx = \int \sin^4 x\left(1-\sin^2 x\right)^2 \cos x dx = \int t^4\left(1-t^2\right)^2 dt = \int t^4 dt -$$

$$-\int t^6 dt + \int t^8 dt = \frac{1}{5}t^5 - \frac{2}{7}t^7 + \frac{1}{9}t^9 + C = \frac{1}{5}\sin^5 x - \frac{2}{7}\sin^7 x + \frac{1}{9}\sin^9 x + C.$$

Случай 2. Оба показателя степени m и n – четные положительные числа. Здесь следует преобразовать подынтегральную функцию с помощью следующих формул:

$$\sin x \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x; \qquad (1)$$

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x); \qquad (2)$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x). \qquad (3)$$

Пример 23. Найти интеграл $\int \sin^2 x \cos^2 x dx.$

Решение. Из формулы (22) следует, что

$$\sin^2 x \cos^2 x = (\sin x \cos x)^2 = \left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)^2 = \frac{1}{4}\sin^2 2x.$$

Применив теперь формулу (23), получаем

$$\sin^2 x \cos^2 x = \frac{1}{4}\cdot\frac{1-\cos 4x}{2} = \frac{1}{8}(1-\cos 4x).$$

Итак,

$$\int \sin^2 x \cos^2 x dx = \frac{1}{8}\int (1-\cos 4x)dx = \frac{1}{8}\int dx - \frac{1}{8}\int \cos 4x dx = \frac{1}{8}x - \frac{1}{32}\sin 4x + C.$$

3. ***Интегралы вида*** $\int \sin mx \cos nx dx, \quad \int \cos mx \cos nx dx, \quad \int \sin mx \sin nx dx.$

Тригонометрические формулы

$$\sin\alpha \cos\beta = \frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)\right],$$

$$\cos\alpha \cos\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)\right],$$

$$\sin\alpha \sin\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\right],$$

дают возможность произведение тригонометрических функций представить в виде суммы.

Вопросы для самопроверки

1. Что называется первообразной от данной функции?
2. Что называется неопределенным интегралом от данной функции?
3. Сформулировать простейшие свойства неопределенного интеграла.
4. Напишите таблицу основных интегралов.
5. В чем состоят методы интегрирования по частям и замены переменной в неопределенном интеграле? Привести примеры.
6. Как производится разложение правильной рациональной дроби на простейшие?
7. В чем состоят методы интегрирования рациональной и иррациональной функции? Привести примеры.
8. Основные способы интегрирования тригонометрических функций. Привести примеры.
9. Когда говорят, что функция не интегрируется в элементарных функциях (в конечном виде)?

ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ
Основные свойства и методы вычисления

Пусть функция f(x) задана в некотором отрезке $[a,в]$. Разобьем отрезок на n частей точками $a< x_0< x_1<\ldots< x_n<$ в. Обозначим $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ через λ. Выберем в каждом промежутке $[x_i, x_{i+1}]$ произвольную точку ξ_i и составим сумму

$$\sigma = \sum f(\xi_i)\Delta x_i.$$

Если существует конечный предел интегральной суммы (25) при $\lambda \to 0$, то его называют определенным интегралом функции f(x) в промежутке от **а** до **в** и обозначается

$$\int_a^в f(x)dx$$

.

Основные свойства определенного интеграла:

1. При перестановке пределов изменяется знак интеграла:

$$\int_a^в f(x)dx = -\int_в^a f(x)dx.$$

2. Интеграл с одинаковыми пределами равен нулю: $\int_a^a f(x)dx = 0$.
3. Отрезок интегрирования можно разбить на части:

$$\int_a^в f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^в f(x)dx.$$

4. Интеграл от суммы функций равен сумме интегралов от всех слагаемых:

$$\int_a^в [f^1(x) + f_2(x) - f_3(x)]\,dx = \int_a^в f_1(x)dx + \int_a^в f_2(x)dx + \int_a^в f_3(x)dx.$$

5. Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла:

$$\int_a^в cf(x)dx = c\int_a^в f(x)dx.$$

6. Если функция f(x), интегрируемая на отрезке $[a,в]$, и f(x) ≥ 0 для всех x ∈ $[a,в]$, то $\int\limits_a^в f(x)dx \ge 0$.

7. Если функции f(x), φ(x) интегрируемы на отрезке $[a,в]$ и

f(x) ≤ φ(x) для всех x ∈ $[a,в]$, то $\int\limits_a^в f(x)dx \le \int\limits_a^в \varphi(x)dx$.

Для вычисления определенного интеграла, когда можно найти соответствующий неопределённый интеграл, служит формула Ньютона – Лейбница:

$$\int\limits_a^в f(x)dx = F(x)\Big|_a^в = F(b) - F(a)$$

Пример 24. Вычислить интеграл $\int\limits_2^3 3x^2 dx$.

Решение. Применяя формулу (26) и свойства определенного интеграла, получим

$$\int\limits_2^3 3x^2dx = 3\frac{x^3}{3}\Big|_2^3 = 3^3 - 2^3 = 27 - 8 = 19.$$

Правило интегрирования по частям в определенном интеграле:

$$\int\limits_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int\limits_a^b vdu,$$

где u и v – функции независимой переменной.

Пример 68. Вычислить интеграл $\int\limits_0^\pi (x-1)\cos x$.

Решение:

$\int\limits_0^\pi (x-1)\cos x = \begin{vmatrix} u = x-1 & dv = \cos xdx \\ du = dx & v = \sin x \end{vmatrix} = (x-1)\cos x\Big|_0^\pi - \int\limits_0^\pi \sin xdx = (\pi - -1)\cos\pi$ $+1+\cos x\Big|_0^\pi = 1 - \pi + 1 - 1 - 1 = -\pi$.

Правило замены переменной в определенном интеграле:

Если в интервале $[a,в]$ функции x = φ(t), φ′(t) и f (φ(t)) -непрерывны и φ(a) = α, φ(в) = β, то

$$\int\limits_\alpha^\beta f(x)dx = \int\limits_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

Пример 25. Вычислить интеграл $\int\limits_0^5 \frac{xdx}{\sqrt{1+3x}}$.

Решение:

$$\int_0^5 \frac{xdx}{\sqrt{1+3x}} = \left| \begin{array}{l} t=\sqrt{1+3x} \\ x=\dfrac{t^2-1}{3}, dx=\dfrac{2}{3}tdt \\ t_н=1, t_в=4 \end{array} \right| = \frac{2}{9}\int_1^4 (t^2-1)dt = \frac{2}{9}\left(\frac{t^3}{3}-t\right)\Big|_1^4 =$$

$$= \frac{2}{9}\left(\frac{64-1}{3}-4+1\right) = 4.$$

Геометрические приложения определенного интеграла

Вычисление площади. Если криволинейная трапеция ограничена сверху и снизу кривыми y =f (x), y = g(x), сбоку прямыми x = a и x = в, то имеем

$$S=\int_a^b (f(x)-g(x))dx.$$

Если фигура задана параметрическими уравнениями

x = φ(t), y = ψ(t), $t_1 \le t \le t_2$, то

$$S=\int_{t_1}^{t_2} y(t)x'(t)dt.$$

Если плоская кривая отнесена к полярной системе координат и задана уравнением ρ=f(φ) , то

$$S=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \rho^2(\varphi)d\varphi.$$

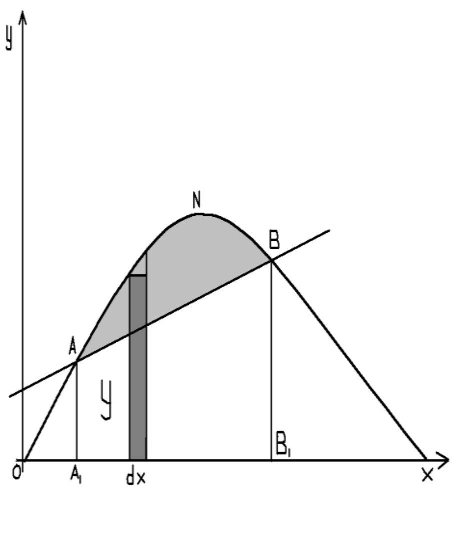
Пример 26. Вычислить площадь, ограниченную следующими линиями:

1) параболой 4y = 8x – x^2 и прямой 4y = x –6;
2) эллипсом x = a cos t, y = a sin t;
3) кардиоидой ρ = a(1+ cos φ).

Решение:

1. Совместно решая данные уравнения, определим две точки пересечения линий, ограничивающих искомую площадь, A $\left(1;\frac{7}{4}\right)$, B(6; 3).

Построим эти точки и проходящие через них данные линии (1). Видим, что искомая площадь ANB равна разности площадей $A_1A\mathrm{N}BB_1$ и A_1ABB_1. Площадь S_1 криволинейной трапеции $A_1A\mathrm{N}BB_1$, прилежащей к оси Оx, выражается интегралом



$$S_1 = \int_1^6 ydx = \frac{1}{4}\int_1^6 (8x-x^2)dx = \frac{1}{4}\left(4x^2-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_1^6 = \frac{205}{12}$$

Площадь S_2 трапеции A_1ABB_1 равна произведению полусуммы её оснований на высоту:

$$S_2 = \frac{AA_1 + BB_1}{2} \cdot A_1B_1 = \frac{95}{8}.$$

Следовательно, искомая площадь

$$S = S_1 - S_2 = \frac{205}{12} - \frac{95}{8} = 5\frac{5}{24}.$$

2. Оси координат совпадают с осями симметрии данного эллипса и поэтому они делят его на четыре одинаковые части. Четвертую часть искомой площади S, расположенную в первом квадранте, найдем как площадь криволинейной трапеции, прилежащей к оси Ox: $\frac{1}{4}S = \int_0^a y\,dx$. Пользуясь данными параметрическими уравнениями эллипса, преобразуем интеграл к переменной t, y = b sint, dx = –a sin t dt, если x = 0, то $t = \frac{\pi}{2}$; если x = a, то t = 0; $S = 4\int_0^a y\,dx = -4ab\int_{\pi/2}^{0} \sin^2 t\,dt = 2ab\int_0^{\pi/2}(1-\cos 2t)dt = 2ab\left(t - \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_0^{\pi/2} =$

$= \pi ab.$

3. Кардиоида симметрична относительно полярной оси . Поэтому искомая площадь равна удвоенной площади криволинейного сектора OAB. Дуга ABO описывается концом полярного радиуса r при изменении полярного угла φ от 0 до π:

$$S = 2\cdot 1/2\int_0^{\pi} r^2 d\varphi = a^2\cdot\int_0^{\pi}(1+\cos\varphi)^2 d\varphi = a^2\int_0^{\pi}\left(1+2\cos\varphi+\cos^2\varphi\right)d\varphi = a^2\cdot$$

$$\cdot\left[\int_0^{\pi} d\varphi + 2\int_0^{\pi}\cos\varphi\, d\varphi + \frac{1}{2}\int_0^{\varphi}(1+\cos 2\varphi)d\varphi\right] = a^2\left(\frac{3}{2}\varphi + 2\sin\varphi + \frac{1}{4}\sin 2\varphi\right)\Big|_0^{\pi} =$$

$$= \frac{3}{2}\pi a^2.$$

Длина дуги плоской кривой. Если плоская кривая отнесена к прямоугольной системе координат и задана уравнениями y = f(x), x = F(x) или параметрическими уравнениями x = φ(t), y = ψ(t), то дифференциал dl длины её дуги, выражается формулой

$$dl = \sqrt{1+(y')^2}\,dx = \sqrt{1+(x')^2}\,dy = \sqrt{x'^2 + y'^2}\,dt,$$

а длина дуги AB определяется формулой

$$L_{AB} = \int_{(A)}^{(B)} dl = \int_a^{в}\sqrt{1+(y')^2}\,dx = \int_{y_A}^{y_E}\sqrt{1+(x')^2}\,dy = \int_{t_A}^{t_B}\sqrt{x'^2+y'^2}\,dt.$$

Если плоская кривая отнесена к полярной системе координат и задана уравнением ρ=f(φ) , то $dl = \sqrt{\rho^2 + (\rho')^2}\,d\varphi$,

$$L_{AB}=\int\limits_{(A)}^{(B)} dl=\int\limits_{\varphi_A}^{\varphi_B}\sqrt{\rho^2+(\rho')^2}\,d\varphi\ .$$

Пример 27:

1) Вычислить длину дуги полукубической параболы $y^2=(x-1)^3$ между точками A(2;–1) и B(5;–8).

2) Одной арки циклоиды x = (t – sint), y = a(1 – cost).

3) $\rho=\sin^3\dfrac{\varphi}{3}$ от $\varphi_1=0$ до $\varphi_2=\dfrac{\pi}{2}$.

Решение:

1. Разрешаем данное уравнение относительно ***y*** и находим y':

y = $\pm(x-1)^{3/2}$; y'= $\pm\dfrac{3}{2}(x-1)^{\frac{1}{2}}$ (знаки $\pm$ в выражении ***y*** указывает, что кривая симметрична оси Ox; точки A и B, имеющие отрицательные ординаты, лежат на той ветви кривой, которая расположена ниже оси Ox).

Подставляя в формулу (30), получим

$$L_{AB}=\int\limits_{x_A}^{x_B}\sqrt{1+(y')^2}\,dx=\int\limits_2^5\sqrt{1+\frac{9}{4}(x-1)}\,dx=\frac{1}{2}\int\limits_2^5\sqrt{9x-5}\,dx=$$

$$=\frac{1}{18}\int\limits_2^5(9x-5)^{\frac{1}{2}}d(9x-5)=\frac{1}{27}(9x-5)^{3/2}\Big|_2^5\approx 7{,}63.$$

2. Дифференцируем по t параметрические уравнения циклоиды

$$x=\frac{dx}{dt}=a(1-\cos t),\quad y=\frac{dy}{dt}=a\sin t$$ и находим дифференциал ее дуги

$$dl=\sqrt{x'^2+y'^2}\,dt=\sqrt{a^2(1-\cos t)^2+a^2\sin^2 t}\,dt=a\sqrt{2(1-\cos t)}\,dt=$$

$$=a\sqrt{4\sin^2\frac{t}{2}}\,dt=2a\sin\frac{t}{2}\,dt.$$

Одна арка циклоиды получается при изменении параметра t от 0 до 2π, поэтому

$$L=2a\int\limits_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}\,dt=4a\int\limits_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}\,d\frac{t}{2}=-4a\cos\frac{t}{2}\Big|_0^{2\pi}=8a.$$

3. Имеем $\rho'=3\sin^2\dfrac{\varphi}{3}\cdot\cos\dfrac{\varphi}{3}\cdot\dfrac{1}{3}.$ Следовательно, по формуле (31) имеем

$$L=\int\limits_0^{\pi/2}\sqrt{\sin^6\frac{\varphi}{3}+(\sin^2\frac{\varphi}{3}\cos\frac{\varphi}{3})^2}\,d\varphi=\int\limits_0^{\pi/2}\sin^2\frac{\varphi}{3}\,d\varphi=\frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/2}(1-\cos\frac{2\varphi}{3})\,d\varphi=$$

$$=\frac{1}{2}(\varphi-\frac{3}{2}\sin\frac{2\varphi}{3})\Big|_0^{\pi/2}=\frac{\pi}{4}-\frac{3}{4}\sin\frac{\pi}{3}=\frac{2\pi-3\sqrt{3}}{8}.$$

Вопросы для самопроверки

1. Как определяется площадь криволинейной трапеции, работа силы, масса?
2. Дать определение определенного интеграла?
3. Сформулировать основные свойства определенного интеграла.
4. Сформулировать и геометрически проиллюстрировать теорему об оценке интеграла.
5. Сформулировать и геометрически проиллюстрировать теорему о среднем в интегральном исчислении.
6. Чему равна производная от интеграла по его верхнему пределу?
7. Сформулировать формулу Ньютона – Лейбница.
8. В чем состоит метод интегрирования по частям (замена переменных) в определенном интеграле.